02/04/2015

ΟΡΙΣΜΟΣ/ΠΡΟΤΑΣΗ 159

Έστω $(V, < >)$ Χ.Ε.Σ πεπερ διάστασης και $T: V \to V$ γραμμική. Τότε υπάρχει μοναδική γραμμική $S: V \to V$ ώστε $< T(v), w > = < v, S(w) >$ για κάθε $v, w \in V$. Η S λέγεται ΣΥΖΥΓΗΣ της T (ως προς το $< >$) και συμβολίζεται με S, T^*. Με άλλα λόγια $< T(v), w > =$

$= \langle v, T^*(w) \rangle$ ① για κάθε $v, w \in V$ και η ① δείχνει ότι T καθορίζει μοναδικά ...ται από T^*

ΑΠΟΔ. ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ Έστω $S, S' : V \to V$ γραμμικές ώστε $\langle T(v), w \rangle = \langle v, S(w) \rangle$, $\langle T(v), w \rangle = \langle v, S'(w) \rangle$ για κάθε $v, w \in V$. Αφαιρώντας $\langle v, S(w) \rangle - \langle v, S'(w) \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle v, S(w) - S'(w) \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ για κάθε $v, w \in V$. Άρα για $v = S(w) - S'(w)$ παίρνουμε $\langle S(w) - S'(w), S(w) - S'(w) \rangle = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow S(w) - S'(w) = 0$ γιατί $\langle \ , \ \rangle$ εσ. γιν. Συνεπώς $S(w) = S'(w)$ $\forall w \in V$ $\Rightarrow S = S'$

ΥΠΑΡΞΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ Έστω $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ορθ. βάση του V. Ορίζουμε $T^* : V \to V$ με $T^*(w) = \langle w, T(e_1) \rangle e_1 + \langle w, T(e_2) \rangle e_2 + \dots + \langle w, T(e_n) \rangle e_n$. Αφού $\langle \ \rangle$ διγραμμική έπεται T^* γραμμική. Έστω $v, w \in V$ Θ.δ. την ① δηλ. ότι $\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle$. Αφού $v \in V$ υπάρχουν $\lambda_i \in \mathbb{R}$ με $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Άρα αφού T γραμμική $T(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i)$. Συνεπώς $\langle T(v), w \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(e_i), w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle w, T(e_i) \rangle$ ② Έχουμε $\langle v, T^*(w) \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \langle w, T(e_j) \rangle e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \langle w, T(e_j) \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle w, T(e_i) \rangle = \langle T(v), w \rangle$ λόγω ②

* ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 160

Έστω $\mathbb{R}^3$ με το σύνηθες εσ. γιν. Έστω $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $T(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2)$. Θα υπολογίσουμε την συζυγή $T^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Έχουμε $\langle (x_1, x_2, x_3), T^*(y_1, y_2, y_3) \rangle = \langle T(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \langle (0, x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_2 + x_2 y_3 = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_2, y_3, 0) \rangle$ Άρα $T^*(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, 0)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 161

Έστω $(V, \langle \rangle)$ χ.ε.γ. πεπερασμένης διάστασης, $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ορθ. βάση του V, $T : V \to V$ γραμμική με πίνακα $A = [T]_e^e$. Τότε για τον πίνακα συζυγούς $T^* : V \to V$ είναι $[T^*]_e^e = A^t$. Με άλλα λόγια $[T^*]_e^e = ([T]_e^e)^t$

ΟΡΙΣΜΟΣ 162

Έστω $(V, \langle \rangle)$ χ.ε.γ. π.δ. διάστασης και $T : V \to V$ γραμμική. Η T λέγεται κανονική αν $T^* \circ T = T \circ T^*$

*

ΘΕΩΡΗΜΑ 163 (χωρίς απόδειξη) ΦΑΣΜΑΤΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $(V, \langle \rangle)$ χ.ε.γ. πεπ. διάστασης και $T : V \to V$ κανονική γρ. απ.

Τότε υπάρχει ορθ. βάση e του V ώστε

$[T]_e^e = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & B_2 & \\ 0 & & B_m \end{bmatrix}$ με κάθε B_i 1×1 ή 2×2 και αν B_i 2×2

υπάρχει $\rho \in \mathbb{R}$ (που μπορεί να είναι και μηδέν) και $\varphi \in [0,\pi]$ με

$B_i = \begin{bmatrix} \rho\sigma\upsilon\nu\varphi & -\rho\eta\mu\varphi \\ \rho\eta\mu\varphi & \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \end{bmatrix}$

* ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 163

(i) Αν $T = T^*$ τότε T κανονική

(ii) Αν T 1-1, ΕΠΙ και $T^* = T^{-1}$ τότε T κανονική

ΜΕΛΕΤΗ ΙΣΟΜΕΤΡΙΩΝ

ΠΡΟΤΑΣΗ 165

Έστω $(V, \langle\,,\rangle)$ $(W, \langle\,,\rangle_1)$ χ.ε.γ. πεπ. διάστασης με $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ και $T: V \to V$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) T ισομετρία (δηλ. T 1-1, ΕΠΙ και $\langle T(v), T(z)\rangle_1 = \langle v, z\rangle$ $\forall z, v$)

(ii) Για κάθε ορθ. βάση $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ του V, το $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ είναι ορθ. βάση του W

(iii) Υπάρχει ορθ. βάση $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ του V ώστε $T(g_1), T(g_2), \dots, T(g_n)$ ορθ. βάση του W

<u>Απόδ.</u> (i) ⇒ (ii) Για δείκτες i, j έχουμε, αφού T-ισομετρία:

$\langle T(e_i), T(e_j)\rangle_1 = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$

Σαν συνέπεια για κάθε i έχουμε $\langle T(e_i), T(e_i)\rangle_1 = 1$. Άρα $T(e_i) \neq 0_W$. Από πρόταση 120(α) έχουμε $T(e_1), \dots, T(e_n)$ γραμμ. ανεξ. Αφού $\dim V = \dim W = n$ έπεται ότι $T(e_1), \dots, T(e_n)$ ορθ. βάση του W

(ii) ⇒ (iii) Άμεσο

(iii) ⇒ (i) Από υποθ. και γραμμ. I η T είναι 1-1 και ΕΠΙ. Έστω $u, z \in V$. Θ.δ.ο. $\langle T(u), T(z)\rangle_1 = \langle u, z\rangle$. Αφού g βάση του V, υπάρχουν $\lambda_i, \mu_j \in \mathbb{R}$ ώστε $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, $z = \sum_{j=1}^{n} \mu_j g_j$ ①

Αφού T-γραμμική $\langle T(u), T(z)\rangle_1 = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(g_i), \sum_{j=1}^{n} \mu_j T(g_j)\rangle_1 =$

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \mu_j$ [illegible] $= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$ ②

Από ①, ② [illegible]

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω $(V, \langle\ \rangle)$, $(W, \langle\ \rangle)$ χ.Ε.Γ. πεπ. διάστασης με $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{R}} V$ και $T: V \to W$ γρ.
Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) T ισομετρία

(ii) $\langle T(u), T(z) \rangle_1 = \langle u, z \rangle \quad \forall u, z \in V$

Απόδ. (i) $\Rightarrow$ (ii) προφανές

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αρκεί ν.δ.ο. T 1-1, επί. Αφού $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$ πεπερασμένη από γρ. αλγ. I αρκεί ν.δ.ο. T 1-1. Αφού T γραμμική, αρκεί ν.δ.ο. $\ker T = \{0_V\}$. Έστω $u \in \ker T$. Τότε $T(u) = 0_W \Rightarrow \langle T(u), T(u) \rangle_1 = \langle 0_W, 0_W \rangle = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα από την υπόθεση $\langle u, u \rangle = \langle T(u), T(u) \rangle_1 = 0_{\mathbb{R}}$. Άρα $u = 0_{\mathbb{R}}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 166

Έστω $(V, \langle\ \rangle)$, $(W, \langle\ \rangle_1)$ χ.Ε.Γ. πεπ. διάστασης. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) Υπάρχει $T: V \to W$ ισομετρία

(ii) $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

Απόδ. (i) $\Rightarrow$ (ii) Αφού T ισομετρία, T 1-1 και επί. Άρα T ισομορφισμός Γρ.Αλγ.1 $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Υποθ. ότι $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} W = n$. Από Gram-Schmidt υπάρχει ορθ. βάση $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ του V και $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ του W. Αφού e βάση του V από γρ. αλγ. 1 υπάρχει μοναδική γραμμική $T: V \to W$ με $T(e_i) = h_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$
Από πρόταση 165 T ισομετρία